EZ-OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira

Iraupena: 3 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty}\left(n^a+n^2\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\dfrac{5}{4n^2+1}\right)$**, non** $a\in\mathbb{R}$

(2 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^a+n^2\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\frac{5}{4n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^a+n^2\right)\cdot\frac{5}{4n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(n^a+n^2\right)}{4n^2}\overset{(*)}{=}\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^a}{4n^2}=\infty & \forall a>2\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2}{4n^2}=\dfrac{5}{2} & a=2\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{4n^2}=\dfrac{5}{4} & \forall a<2\end{cases}$$

$$(*)\begin{cases}\text{Baldin eta } a>2 & \Rightarrow \quad n^a+n^2\sim n^a\\ \text{Baldin eta } a=2 & \Rightarrow \quad n^a+n^2=2n^2\\ \text{Baldin eta } a<2 & \Rightarrow \quad n^a+n^2\sim n^2\end{cases}$$

2.- a) Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}$ seriearen izaera.

b) Zenbat gai batu beharko genuke bere batura hurbildua lortzeko, errorea 10^{-2} baino txikiagoa izanik?

(2 puntu)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}$ serie alternatua denez, balio absolututan aztertzen hasiko gara, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}$ hain zuzen ere. Konparaziozko irizpide erabiliz:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{1/2}}\\ \text{Eta } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}} \text{ dibergentea da}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}} \text{ dibergentea da}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}$ ez da absolutuki konbergentea.

Serie alternatua denez, Leibniz-en teorema egiaztatzen denetz aztertuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l}i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}=0\\ ii)\ |a_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt{n+5}}<|a_n|=\frac{1}{\sqrt{n+4}}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \text{ serieak Leibniz-en teorema egiaztatzen}$$

du eta, beraz, baldintzaz konbergentea da.

b) Konbergentea denez, batura finitua existitzen da, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}=S\in\mathbb{R}$, eta, horrez gain, Leibniz-en toremaren ondorioz, hurrengoa ere betetzen dela badakigu:

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|$$

Kasu honetan, errorea 10^{-2} baino txikiagoa iztaeko:

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt{n+5}}\le\frac{1}{10^2}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{n+5}\ge 10^2\quad\Leftrightarrow\quad n+5\ge 10^4\quad\Leftrightarrow\quad n\ge 10^4-5$$

Hau da, S beharrean S_n kalkulatzean egindako errorea 10^{-2} baino txikiagoa izateko, $n=10^4-5$ batugai batu beharko genuke.

3.- Kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ berretura-seriearen batura, bere konbergentzi arloa zein den adieraziz.

(2 puntu)

a) $\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \quad \forall x \in (-R, R)$, eta, tarte horretan, berretura-serie deribagarria da:

$$\exists S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \overset{(*)}{=} \frac{2x}{1-x^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

(*) Serie geometrikoa da, $r = x^2 \Rightarrow \left[\text{konbergentea da} \Leftrightarrow |r| = x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1\right]$

Eta, emaitza hori integratuz:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = \int \frac{2x}{1-x^2} dx = -\mathrm{L}\left(1-x^2\right) + k \overset{(**)}{=} -\mathrm{L}\left(1-x^2\right) \quad \forall x \in (-1,1)$$

(**) $x = 0$ puntuan ordezkatuz: $S(0) = 0 = -\mathrm{L}\left(1\right) + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$

Orain, konbergentzi tarteko muga aztertuko dugu:

Berretura-seriea $x = \pm 1$ puntuetan ordezkatuz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie dibergentea lortzen dugu beraz, puntu horietan $\nexists S(x)$.

Orduan, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\mathrm{L}\left(1-x^2\right) \quad \forall x \in (-1,1)$

4.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^3\cdot e^{x+y}}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) **Aztertu bere jarraitutasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

b) **Kalkulatu bere deribatu partzialak** $(0,0)$ **puntuan.**

c) **Aztertu bere diferentziagarritasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=0$, eta,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3\cdot \underbrace{e^{x+y}}_{1}}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\sin^3\theta}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\rho\cdot\sin^3\theta=0$$

Beraz, *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{\frac{k^3\cdot e^k}{k^2}-0}{k}=\lim\limits_{k\to0}e^k=1$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{k^3\cdot e^{h+k}}{h^2+k^2}-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^3\cdot e^{h+k}-k\cdot\left(h^2+k^2\right)}{\left(h^2+k^2\right)\cdot\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^3\cdot\sin^3\theta\cdot e^{\rho\cdot(\cos\theta+\sin\theta)}-\rho^3\cdot\sin\theta}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\left(\sin^3\theta\cdot e^{\rho\cdot(\cos\theta+\sin\theta)}-\sin\theta\right)=\sin^3\theta-\sin\theta\Rightarrow \text{limitea ez da existitzen.}$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

5.- $F(x,y,z)=e^{y}\cdot\sqrt{x\cdot z}-2=0$ **ekuazioa emanik:**

a) **Aztertu ea** $z=z(x,y)$ **funtzio diferentziagarria definitzen duen** $P(1,0,4)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) **Kalkulatu** $z=z(x,y)$ **funtzioaren gradientea** $Q(1,0)$ **puntuan.**

c) **Lortu** $z=z(x,y)$ **funtzioaren deribatu direkzionalaren balioa** $Q(1,0)$ **puntuan,** $\vec{u}=(2,-1)$ **bektorearen norabidean.**

(2.5 puntu)

a) $F(x,y,z)=e^{y}\cdot\sqrt{x\cdot z}-2=0$ ekuazioari funtzio inplizituaren teorema aplikatuko diogu $P(1,0,4)$ puntuan:

i. $F(P)=2-2=0$

ii. $F'_x=\dfrac{z\cdot e^{y}}{2\sqrt{x\cdot z}}$ $\quad F'_y=\sqrt{x\cdot z}\cdot e^{y}$ $\quad F'_z=\dfrac{x\cdot e^{y}}{2\sqrt{x\cdot z}}$ jarraituak dira $P(1,0,4)$ puntuaren ingurunean non $x\cdot z>0$.

iii. $F'_z(P)=\dfrac{1}{4}\neq 0$

Orduan, $P(1,0,4)$ puntuaren ingurunean non $x\cdot z>0$, $F(x,y,z)=e^{y}\cdot\sqrt{x\cdot z}-2=0$ ekuazioak $z=z(x,y)$ funtzio diferentziagarria definitzen du, $F(x,y,z(x,y))=0$ eta $z(1,0)=4$ egiaztatzen delarik.

b) $\overrightarrow{\nabla z}(1,0)=\left(z'_x(1,0),z'_y(1,0)\right)$

$F(x,y,z(x,y))=0$ ekuazioan *x* eta *y* aldagaiekiko deribatuz:

$$\left.\begin{array}{l} F'_x+F'_z\cdot z'_x=0 \iff z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z} \Rightarrow z'_x(1,0)=-\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=-\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=-4 \\[2ex] F'_y+F'_z\cdot z'_y=0 \iff z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z} \Rightarrow z'_y(1,0)=-\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=-\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=-8 \end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{\nabla z}(1,0)=(-4,-8)$$

c) $z=z(x,y)$ diferentziagarria denez, bere deribatu direkzionala $Q(1,0)$ puntuan, $\vec{u}$ bektore unitarioaren norbidean honela kalkula daiteke:

$$\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_{Q}=\overrightarrow{\nabla z}(Q)\cdot\vec{u}$$

$\vec{u}=(2,-1) \Rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{5} \Rightarrow \vec{u}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ unitarioa da.

Beraz, $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_{Q}=\overrightarrow{\nabla z}(Q)\cdot\vec{u}=(-4,-8)\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)=0$

6.- Aurkitu $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases}$ **baldintzak betetzen dituzten** $f(x,y,z)=x+y+2z$ **funtzioaren mutur erlatiboak.**

(2.5 puntu)

Mutur erlatibo baldintzatuak dira, eta, Lagrangeren biderkatzaieleen metodoa erabiliko dugu bere kalkularako.

$$w(x,y,z)=x+y+2z+\lambda\left(x^2+y^2-4\right)+\mu\left(x-y-2z-1\right)$$

Puntu kritikoen kalkulua:

$$w'_x=1+2\lambda x+\mu=0 \quad \overset{\mu=1}{\Rightarrow} \quad 2+2\lambda x=0 \quad \overset{\lambda=0}{\Rightarrow} \quad 2=0\#$$

$$w'_y=1+2\lambda y-\mu=0 \quad \overset{\mu=1}{\Rightarrow} \quad 2\lambda y=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$w'_z=2-2\mu=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu=1$$

$$x^2+y^2-4=0 \quad \overset{y=0}{\Rightarrow} \quad x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x-y-2z-1=0 \quad \begin{cases} \overset{x=2 \text{ eta } y=0}{\Rightarrow} \quad z=\dfrac{1}{2} \\ \overset{x=-2 \text{ eta } y=0}{\Rightarrow} \quad z=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Beraz, bi puntu kritiko baldintzatu ditugu:

$$A\left(2,0,\frac{1}{2}\right) \quad \lambda=-\frac{1}{2} \quad \mu=1 \qquad \text{eta} \qquad B\left(-2,0,-\frac{3}{2}\right) \quad \lambda=\frac{1}{2} \quad \mu=1$$

Puntu kritikoen sailkapena:

$$\left.\begin{array}{l} w''_{x^2}=2\lambda \\ w''_{y^2}=2\lambda \\ w''_{z^2}=0 \\ w''_{xy}=w''_{xz}=w''_{yz}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} d^2w(A)=-(dx)^2-(dy)^2<0 & \Rightarrow A \text{ maximo erlatibo baldintzatua da} \\ d^2w(B)=(dx)^2+(dy)^2>0 & \Rightarrow B \text{ minimo erlatibo baldintzatua da} \end{cases}$$

<u>OHARRA</u>:

$d^2w(A)=0 \quad \Leftrightarrow \quad dx=dy=0$ (gauza bera B puntuan)

Baina, kasu horretan, eta, $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases}$ baldintzak kontuan hartuta:

$\begin{cases} 2xdx+2ydy=0 \\ dx-dy-2dz=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dx=dy=dz=0$, ezinezkoa dena.

7.- a) Kalkulatu $V \equiv \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6-x^2-y^2$ solidoaren bolumena.

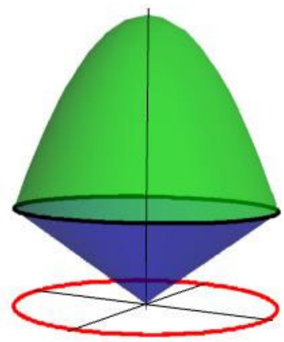
b) Kalkulatu V solidoaren mugako $S \equiv z = 6-x^2-y^2$ gainazalaren zatiaren azalera.

(3.5 puntu)

V solidoaren muga osatzen duten bi zatien arteko ebakidura kalkulatuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = x^2+y^2 \\ z = 6-x^2-y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 6-z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$z^2 = 6-z \quad \Leftrightarrow \quad z^2+z-6=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=-3<0\# \\ z=2 \end{cases}$$



Hau da, mugako bi zatien arteko ebakidura-kurba $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=2 \end{cases}$ da. Eta, solidoaren proiekzioa $R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 4$ da.

Zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \rho \le z \le 6-\rho^2 \equiv \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \\ \rho\le z\le 6-\rho^2 \end{cases}$

Beraz, $Bol(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_\rho^{6-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\left(6-\rho^2-\rho\right)d\rho\, d\theta = 2\pi\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 =$

$$= 2\pi\left(12-4-\frac{8}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

b) $Azalera(S) = \iint_S dS$, non $S \equiv z = 6-x^2-y^2 \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 4$. Orduan:

$$Azalera(S) = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy$$

non $\vec{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = (2x, 2y, 1) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{N}\right| = \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$

Polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \end{cases}$

Beraz, $Azalera(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 2\pi \left.\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right|_0^2 = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$

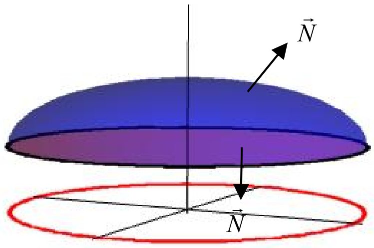
8.- $\vec{F}(x,y,z)=x^2\cdot\vec{i}-2xy\cdot\vec{j}+\vec{k}$ **funtzio bektoriala emanik:**

a) Kalkulatu $S\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+(z-1)^2=1\\ z=1\end{cases}$, $z\geq 1$ **izanik, gainazal itxiaren zati bakoitzetik irteten den** $\vec{F}$ **-ren fluxua.**

b) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa** $C\equiv\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+(z-1)^2=1\\ z=1\end{cases}$ **kurban zehar.**

(3.5 puntu)

a) $\vec{F}$ -ren fluxua S gainazalean zehar $=\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}$



Kasu honetan, S gainazal itxia bi zatiz osatuta dago, $S=S_1\cup S_2$, non:

$$\begin{cases}S_1\equiv\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+(z-1)^2=1, z\geq 1\\ S_2\equiv z=1\end{cases}$$

$$\forall(x,y)\in R_{xy}\equiv\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1$$

Orduan, $\vec{F}$ -ren fluxua S gainazalean zehar $=\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{S_1}\vec{F}d\vec{S}+\iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}$

Baina, S gainazal itxia denez, Gauss-en teorema erabil daiteke, orduan:

$$\vec{F}\text{ -ren fluxua } S \text{ gainazalean zehar}=\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{S_1}\vec{F}d\vec{S}+\iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}=\iiint\limits_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz$$

non V, S gainazalak mugaturiko solidoa den. Eta,

$$div\left(\vec{F}\right)=2x-2x+0=0 \quad\Rightarrow\quad \iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{S_1}\vec{F}d\vec{S}+\iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \iint\limits_{S_1}\vec{F}d\vec{S}=-\iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}$$

Orain, $\iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}=\pm\iint\limits_{R_{xy}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy$

non $S_2\equiv z=1 \quad \forall(x,y)\in R_{xy}\equiv\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1 \quad\Rightarrow\quad \vec{N}=(0,0,1) \quad \gamma>\dfrac{\pi}{2}$

Beraz, $\iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}=-\iint\limits_{R_{xy}}dxdy\overset{(*)}{=}-\int_0^{2\pi}\int_0^1 6\rho\, d\rho\, d\theta=-2\pi\cdot 3\rho^2\Big|_0^1=-6\pi \quad\Rightarrow\quad \iint\limits_{S_2}\vec{F}d\vec{S}=6\pi$

(*) Polarretan: $\begin{cases}x=2\rho\cdot\cos\theta\\ y=3\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$ $|J|=6\rho \quad\Rightarrow\quad R_{xy}\equiv\begin{cases}0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq\rho\leq 1\end{cases}$

b) $\vec{F}$ -ren zirkulazioa C kurban zehar $= \oint_C \vec{F}d\vec{r} = \oint_C \left(x^2 \cdot dx - 2xy \cdot dy + dz\right)$

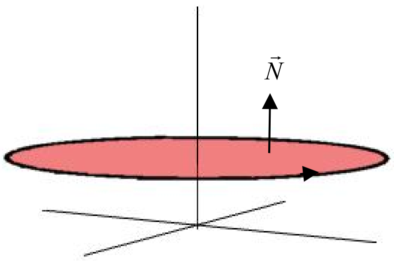
non $C \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + (z-1)^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$

Beraz,

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-8\cos^2 t \cdot \sin t - 36\cos^2 t \cdot \sin t\right)dt = -\int_0^{2\pi} 44\cos^2 t \cdot \sin t dt = \left.\frac{44\cos^3 t}{3}\right|_0^{2\pi} = 0$$

<u>Beste modu batera</u> egin daiteke: STOKES-en teorema erabiliz.

$\vec{F}$ -ren zirkulazioa C kurban zehar $= \oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) \cdot \vec{N}\right) dxdy$



non

$S_2 \equiv z = 1 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$

eta $\vec{N} = (0,0,1) \quad \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} - 2y \cdot \vec{k}$

Orduan,

$\vec{F}$ -ren zirkulazioa C kurban zehar $= \oint_C \vec{F}d\vec{r} = -\iint_{R_{xy}} -2ydxdy = 2\iint_{R_{xy}} ydxdy \overset{(*)}{=} 0$

(*) y funtzio bakoitia eta R_{xy} eskualde simetrikoa $y = 0$ zuzenarekiko.